

DASAR TEORI
DIRECT LINEAR TRANSFORMASI (DLT)

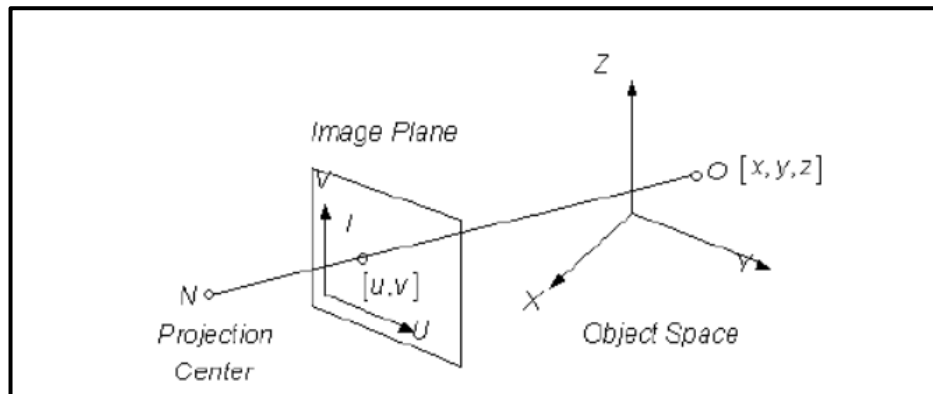
M.ATHA RABBITA 14.25.912 ¹⁾

1) Teknik Geodesi, FTSP ,ITN, Malang
email: atharabbita94@gmail.com

Metode *Direct Linear Transformation* (DLT) merupakan suatu metode kalibrasi kamera yang berdasarkan kondisi kolinearitas dimana pusat proyeksi pada lensa dan titik ideal pada foto terletak pada satu garis lurus.

Titik awal persamaan perspektif kamera persamaan ini memetaan koordinat 3D tes dari titik generik dalam ruang (x,y,z) ke dalam yang sesuai koordinat pada bidang kamera (u,v).

$$\begin{cases} u - u_0 = -d \frac{r_{11}(x-x_0)+r_{12}(y-y_0)+r_{13}(z-z_0)}{r_{31}(x-x_0)+r_{32}(y-y_0)+r_{33}(z-z_0)} \\ v - v_0 = -d \frac{r_{21}(x-x_0)+r_{22}(y-y_0)+r_{23}(z-z_0)}{r_{31}(x-x_0)+r_{32}(y-y_0)+r_{33}(z-z_0)} \end{cases} \dots\dots\dots(1.1)$$



Gambar 1.1 vektor pusat proyeksi terhadap bidang refrensi (sumber : Aziz,1971)

Persamaan ini adalah persamaan non linear terhadap kedua transformasi koordinat dan 7 parameter yang tidak diketahui yaitu,

Camera position : (x_0, y_0, z_0)

Camera orientation : (r_{ij})

Principial distance : d

Total : $3+3+1 = 7$

Trik dari DLT (Direct Linear Transformasi) adalah untuk menentukan nilai (tidak linier di 7 independen parameter) menjadi persamaan linear di ikuti oleh 11 parameter itu, disisi lain tidak independen.

Catatan di DLT yaitu,

$$[d_u, d_v] = \left[\frac{d}{\lambda_u}, \frac{d}{\lambda_v} \right]$$

$$D = -(x_0 r_{31} + y_0 r_{32} + z_0 r_{33})$$

$$L_1 = \frac{u_0 r_{31} - d r_{11}}{D}; L_2 = \frac{u_0 r_{32} - d r_{12}}{D}; L_3 = \frac{u_0 r_{33} - d r_{13}}{D}$$

$$L_4 = \frac{(d.r_{11} - u_0 r_{31})x_0 + (d.r_{12} - u_0 r_{32})y_0 + (d.r_{13} - u_0 r_{33})z_0}{D}$$

$$L_5 = \frac{v_0 r_{31} - d.r_{21}}{D}; L_6 = \frac{v_0 r_{32} - d.r_{22}}{D}; L_7 = \frac{v_0 r_{33} - d.r_{23}}{D}$$

$$L_8 = \frac{(d.r_{21} - v_0 r_{31})x_0 + (d.r_{22} - v_0 r_{32})y_0 + (d.r_{23} - v_0 r_{33})z_0}{D}$$

$$L_9 = \frac{r_{31}}{D}; L_{10} = \frac{r_{32}}{D}; L_{11} = \frac{r_{33}}{D} \dots\dots\dots(1.2)$$



$$u = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$v = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \dots\dots\dots(1.3)$$



$$u = xL_1 + yL_2 + zL_3 + L_4 - uxL_9 - uyL_{10} - uzL_{11}$$

$$u = xL_1 + yL_2 + zL_3 + L_4 - uxL_9 - uyL_{10} - uzL_{11} \dots\dots\dots(1.4)$$

Kalibrasi kamera terdiri dari sejumlah “titik kontrol” target yang kita tahu, dengan desain, baik koordinat dilapangan dan koordinat foto. Karena setiap titik menghasilkan 2 persaaan dan tidak diketahui 11 jumlah minimum poin adalah 6. Kalibrasi dengan *least square estimation* (LSE), $N \geq 6$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ - \\ u_N \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -u_1y_1 & -u_1z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -u_1x_1 & -u_1y_1 & -u_1z_1 \\ - \\ X_N & Y_N & Z_N & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_Nx_N & -u_Ny_N & -u_Nz_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_N & Y_N & Z_N & 1 & -u_Nx_N & -u_Ny_N & -u_Nz_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ - \\ - \\ L_{11} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1.5)$$

$$X = (A^T A)^{-1} (A^T F) \dots\dots\dots(1.6)$$

2.11.1 Direct Linear Transformasi (DLT) - 3D

$$u = \frac{L_1X+L_2Y+L_3Z+L_4}{L_9X+L_{10}Y+L_{11}Z+1} \dots\dots\dots(1.7)$$

$$v = \frac{L_5X+L_6Y+L_7Z+L_8}{L_9X+L_{10}Y+L_{11}Z+1} \dots\dots\dots(1.8)$$

dimana ,

u, v = koordinat foto

X, Y, Z = koordinat di lapangan

L1, l2,...,L11 = parameter standar DLT

$$[d_u, d_v] = \left[\frac{d}{\lambda_u}, \frac{d}{\lambda_v} \right]$$

$$D = -(x_0r_{31} + y_0r_{32} + z_0r_{33})$$

$$L_1 = \frac{u_0r_{31}-d_ur_{11}}{D}; L_2 = \frac{u_0r_{32}-d_ur_{12}}{D}; L_3 = \frac{u_0r_{33}-d_ur_{13}}{D}$$

$$L_4 = \frac{(d_ur_{11}-u_0r_{31})x_0+(d_ur_{12}-u_0r_{32})y_0+(d_ur_{13}-u_0r_{33})z_0}{D}$$

$$L_5 = \frac{v_0r_{31}-d_vr_{21}}{D}; L_6 = \frac{v_0r_{32}-d_vr_{22}}{D}; L_7 = \frac{v_0r_{33}-d_vr_{23}}{D}$$

$$L_8 = \frac{(d_vr_{21}-v_0r_{31})x_0+(d_vr_{22}-v_0r_{32})y_0+(d_vr_{23}-v_0r_{33})z_0}{D}$$

$$L_9 = \frac{r_{31}}{D}; L_{10} = \frac{r_{32}}{D}; L_{11} = \frac{r_{33}}{D} \dots\dots\dots(1.9)$$

Koefisien L_1 sampai L_{11} merupakan parameter *direct linear transformation* (DLT) yang menggambarkan hubungan antara sistem referensi suatu objek pada suatu ruang dengan sistem referensi bidang citra fotografik.

Persamaan (2.9) merupakan persamaan standar untuk 3-D *Direct Linear Transformation*. Pada persamaan tersebut dapat ditambah dengan suatu kesalahan optik karena distorsi lensa pada kamera akan menyebabkan titik pada citra fotografik bergeser dari lokasi yang ideal. Oleh karena itu, untuk menerapkan kembali kondisi kolinearitas maka sejumlah koreksi diberikan terhadap persamaan (2.15) sehingga menjadi,

$$\begin{aligned}
 u + \Delta u &= \frac{L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1} \\
 v + \Delta v &= \frac{L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1} \dots\dots\dots(1.10)
 \end{aligned}$$

Berkaitan dengan pemberian koreksi tersebut, distorsi lensa radial mempunyai tiga parameter yaitu (K_1, K_2, K_3) dan dua parameter (P_1, P_2) untuk distorsi tangensial (*de-centering distortion*). Selain parameter yang telah disebutkan juga terdapat parameter tambahan (A_1, A_2) untuk memperhitungkan diferensial *scaling* dan *non-orthogonal* dari sumbu suatu sensor. Hal ini diterapkan untuk kamera CCD (*charge couple device*). Penjumlahan dari pengaruh distorsi ini dapat dilihat pada persamaan 2.18 berikut ini.

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= u'(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + P_1(r^2 + 2u'^2) + 2P_2u'v' \\
 \Delta v &= v'(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + 2P_1u'v'(r^2 + 2u'^2) + P_2(r^2 + 2v'^2) + A_1u' + A_2v' \\
 &\dots\dots\dots(1.11)
 \end{aligned}$$

dimana,

$u' = u - u_0$ = absis titik terdistorsi yang relatif terhadap titik utama

$v' = v - v_0$ = ordinat titik distorsi yang relatif terhadap titik utama

(u_0, v_0) = koordinat titik utama

$r = \sqrt{u'^2 + v'^2}$ = Jarak radial dari titik utama pada bidang citra fotografik (citra fotografik)

sumbu optik dari lensa didefinisikan dengan garis yang tegak lurus terhadap citra fotografik yang melalui pusat proyeksi (X_c, Y_c, Z_c). Titik perpotongan antara sumbu

optik dengan bidang citra fotografik dikenal sebagai titik utama yang tidak selalu harus berada di lokasi pusat geometrik citra fotografik, meskipun umumnya berada di sekitar pusat geometrik. Jarak antara pusat proyeksi terhadap titik utama dikenal sebagai jarak utama (c). Jarak c sama dengan panjang fokus dari suatu lensa ketika suatu objek direkam dalam jarak yang tidak terbatas.

Transformasi antara citra fotografik dan objek pada suatu ruang mempunyai 9 derajat kebebasan. Tiga dari derajat kebebasan tersebut (x_o, y_o, z_o) merupakan elemen orientasi dalam suatu kamera dan sisanya yaitu berkaitan dengan orientasi eksternal dari suatu kamera. Orientasi eksternal tersebut yaitu 3 translasi (X_c, Y_c, Z_c) dan 3 rotasi (ω, Φ, κ). Oleh karena itu 11 parameter transformasi menurut Bopp dan Krauss harus memenuhi bentuk *orthogonal*, untuk lebih jelasnya dapat dilihat persamaan (2.19) berikut ini.

$$(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - (L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) + \frac{(L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11})^2 - (L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11})^2}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2} = 0$$

$$L_1L_5 + L_2L_6 + L_3L_7 - \frac{(L_1L_{10} + L_2L_{11} + L_3L_{11})(L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11})}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2} = 0$$

.....(1.12)

Untuk posisi kamera dan titik utama (*Principal Point*) berdasarkan persamaan (2.19) didapatkan suatu bentuk persamaan yaitu persamaan (2.20) sebagai berikut:

$$L_1x_0 + L_2y_0 + L_3z_0 = -L_4$$

$$L_5x_0 + L_6y_0 + L_7z_0 = -L_8$$

$$L_9x_0 + L_{10}y_0 + L_{11}z_0 = -1 \dots\dots\dots(1.13)$$

Persamaan (2.20) tersebut dapat dibuat dalam bentuk matriks seperti pada persamaan (2.21) yaitu sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_4 \\ -L_8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -L_4 \\ -L_8 \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.14)$$

Seperti pada kondisi persamaan (1.14) maka didapatkan bentuk persamaan (1.15) yaitu sebagai berikut :

$$L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2 = \frac{1}{D^2} [r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2] = \frac{1}{D^2}$$

$$D^2 = \frac{1}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2} \dots\dots\dots(1.16)$$

Persamaan (2.22) tersebut dapat dibentuk lagi menjadi persamaan sebagai berikut ini.

$$(DL_1)(DL_9) + (DL_2)(DL_{10}) + (DL_3)(DL_{11}) = u_0[r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2] - d_u[r_{11}r_{31} + r_{11}r_{32} + r_{11}r_{33}] = u$$

$$(DL_5)(DL_9) + (DL_6)(DL_{10}) + (DL_7)(DL_{11}) = v_0$$

$$u_0 = D^2(L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11}) = \frac{L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11}}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}$$

$$v_0 = D^2(L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11}) = \frac{L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11}}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2} \dots\dots\dots(1.17)$$

Parameter transformasi ($L_1 - L_{11}$) dan 5 parameter koreksi (K_1, K_2, K_3, P_1, P_2) tersebut dapat dihitung secara iterasi dengan menggunakan perataan kuadrat terkecil.

$$\begin{aligned} AX &= F \\ (A^T A)X &= A^T F \\ (A^T A)^{-1}(A^T A)X &= (A^T A)^{-1}(A^T F) \\ X &= (A^T A)^{-1}(A^T F) \dots\dots\dots(1.18) \end{aligned}$$

dimana,

A = matriks desain transformasi

F = matriks residu transformasi

X = matriks parameter transformasi

Berdasarkan uraian di atas maka untuk mendapatkan parameter-parameter optik lensa dapat dihitung menggunakan perataan kuadrat terkecil. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat matriks desain, residu, dan parameter di berikut

dimana,

(u,v) = Koordinat citra fotografik

(X,Y,Z) = Koordinat di lapangan

L₁, L₂,..... , L₁₁ = Parameter standar DLT -3D

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 & 0 & 0 & -uX & -uY & -uZ & u'r^2 R & u'r^4 R & u'r^6 R & (r^2 + 2u'^2) R & u'v' R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z & -vX & -vY & -vZ & v'r^2 R & v'r^4 R & v'r^6 R & u'v' R & (r^2 + 2v'^2) R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.21)$$

dimana, R_i = L₉X_i + L₁₀Y_i + L₁₁Z_i + 1

$$\begin{bmatrix} \frac{X_1}{R_1} & \frac{Y_1}{R_1} & \frac{Z_1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-u_1 x_1}{R_1} & \frac{-u_1 y_1}{R_1} & \frac{-u_1 z_1}{R_1} & \frac{u'_1 r^2 R_1}{R_1} & \frac{u'_1 r^4 R_1}{R_1} & \frac{u'_1 r^6 R_1}{R_1} & \frac{(r^2 + 2u'^2) R_1}{R_1} & \frac{u'_1 v'_1 R_1}{R_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{X_1}{R_n} & \frac{Y_1}{R_n} & \frac{Z_1}{R_n} & \frac{1}{R_n} & \frac{-v_1 x_1}{R_n} & \frac{-v_1 y_1}{R_n} & \frac{-v_1 z_1}{R_n} & \frac{v'_1 r^2 R_1}{R_n} & \frac{v'_1 r^4 R_1}{R_n} & \frac{v'_1 r^6 R_1}{R_n} & \frac{u'_1 v'_1 R_1}{R_n} & \frac{(r^2 + 2v'^2) R_1}{R_n} \\ \dots & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \frac{X_n}{R_n} & \frac{Y_n}{R_n} & \frac{Z_n}{R_n} & \frac{1}{R_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-u_n x_n}{R_n} & \frac{-u_n y_n}{R_n} & \frac{-u_n z_n}{R_n} & \frac{u'_n r^2 R_n}{R_n} & \frac{u'_n r^4 R_n}{R_n} & \frac{u'_n r^6 R_n}{R_n} & \frac{(r^2 + 2u'^2) R_n}{R_n} & \frac{u'_n v'_n R_n}{R_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{X_1}{R_n} & \frac{Y_1}{R_n} & \frac{Z_1}{R_n} & \frac{1}{R_n} & \frac{-v_n x_1}{R_n} & \frac{-v_n y_1}{R_n} & \frac{-v_n z_1}{R_n} & \frac{v'_1 r^2 R_1}{R_n} & \frac{v'_1 r^4 R_1}{R_n} & \frac{v'_1 r^6 R_1}{R_n} & \frac{u'_n v'_n R_1}{R_n} & \frac{(r^2 + 2v'^2) R_n}{R_n} \end{bmatrix}$$

Parameter transformasi (L_1 - L_{11}) dan 5 parameter koreksi (K_1, K_2, K_3, P_1, P_2 ,) tersebut dapat dihitung secara iterasi dengan menggunakan perataan kuadrat terkecil.

$$\begin{aligned}
 AX &= F \\
 (A^T A)X &= A^T F \\
 (A^T A)^{-1}(A^T A)X &= (A^T A)^{-1}(A^T F) \\
 X &= (A^T A)^{-1}(A^T F) \dots\dots\dots(2.22)
 \end{aligned}$$

dimana,

A = matrik transformasi

F = matrik residu tranformasi

X = matrik parameter transformasi

Berdasarkan uraian diatas maka untuk mendapatkan parameter-parameter optic lensa dapat dihitung menggunakan perataan kuadrat terkecil.

2.11.2 Direct Linear Transformasi (DLT) - 2D

Transformasi DLT untuk pemetaan titik pada citra fotografik yang mempunyai ketinggian tertentu, sedangkan pemetaan suatu objek dalam 2D-DLT, nilai koordinat Z selalu 0, dan untuk memetakan objek tersebut terhadap bidang citra fotografik maka persamaan direduksi. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat persamaan (2.23)

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{L_1x+L_2y+L_3}{L_7x+L_8y+1} \\
 u &= \frac{L_1x+L_2y+L_3}{L_7x+L_8y+1} \dots\dots\dots(2.23)
 \end{aligned}$$

dimana ,

$L_1, L_2, \dots, L_8 = parameter\ standar - 2D$

$$[d_u, d_v] = \left[\frac{d}{\lambda_u}, \frac{d}{\lambda_v} \right]$$

$$\begin{aligned}
 D &= -(x_0 r_{31} + y_0 r_{32}) \\
 L_1 &= \frac{u_0 r_{31} - d_u r_{11}}{D} \\
 L_2 &= \frac{u_0 r_{32} - d_u r_{12}}{D} \\
 L_3 &= \frac{(d_u r_{11} - u_0 r_{31})x_0 + ((d_u r_{12} - u_0 r_{32})y_0)}{D} \\
 L_4 &= \frac{v_0 r_{31} - d_v r_{21}}{D} \\
 L_5 &= \frac{v_0 r_{32} - d_v r_{22}}{D} \\
 L_6 &= \frac{(d_v r_{21} - v_0 r_{31})x_0 + ((d_v r_{22} - v_0 r_{32})y_0)}{D} \\
 L_7 &= \frac{r_{31}}{D} \\
 L_8 &= \frac{r_{32}}{D} \dots\dots\dots(2.24)
 \end{aligned}$$

Persamaan (2.24) merupakan persamaan standar untuk *direct linear transformation-2D*, pada persamaan tersebut dapat ditambah dengan suatu kesalahan optik karena distorsi lensa pada kamera akan menyebabkan titik pada citra fotografik bergeser dari lokasi yang ideal. Oleh karena itu, untuk menerapkan kembali kondisi kolineartas maka sejumlah koreksi diberikan terhadap persamaan (2.24) sehingga menjadi :

$$\begin{aligned}
 u - \Delta u &= \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3}{L_7 X + L_8 Y + 1} \\
 u - \Delta u &= \frac{L_4 X + L_5 Y + L_6}{L_7 X + L_8 Y + 1} \dots\dots\dots(2.25)
 \end{aligned}$$

Berkaitan dengan pemberian koreksi tersebut, distorsi lensa radial dapat mempunyai tiga parameter yaitu (K_1, K_2, K_3) dan dua parameter distorsi tangensial (*de-centering distortion*) (P_1, P_2). Selain parameter yang telah disebutkan juga terdapat parameter tambahan (A_1, A_2) untuk memperhitungkan diferensial *scaling* dan *non-orthogonal* dari sumbu suatu sensor, hal ini sangat diterapkan untuk

kamera CCD (*charge couple device*). Penjumlahan dari pengaruh distorsi ini dapat dilihat pada persamaan (2.26) berikut ini.

$$\begin{aligned} \Delta u &= u'(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + P_1(r^2 + 2u'^2) + 2P_2 u' v' \\ \Delta v &= v'(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + 2P_1 u' v' + P_2(r^2 + 2u'^2) + A_1 u' + A_1 u' v' \\ &\dots\dots\dots(2.26) \end{aligned}$$

dimana :

$u' = u - u_0$ = absis titik terdistorsi yang relatif terhadap titik utama

$v' = v - v_0$ = ordinat titik terdistorsi yang relatif terhadap titik utama

(u_0, v_0) = koordinat titik utama

$r = \sqrt{u'^2 + v'^2}$ = jarak radial dari titik utama pada bidang citra fotografik (citra fotografik)

Persamaan (2.19) dapat disusun menjadi bentuk berikut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} u &= \frac{1}{R} (L_1 X + L_2 Y + L_3 - L_7 u X + L_8 u Y + \Delta u \\ \frac{1}{R} v &= \frac{1}{R} (L_4 X + L_5 Y + L_6 - L_7 u X + L_8 u Y + \Delta v) \dots\dots\dots(2.27) \end{aligned}$$

Persamaan(2.27) dapat disusun dalam bentuk matriks yaitu sebagai berikut :

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XY 1 0 0 & -uX - uY u' r^2 R & u' r^4 R & u' r^6 R (r^2 + 2u'^2) R u' v' R \\ 0 0 0 & XY 1 & -vX - vY v' r^2 R & v' r^4 R & v' r^6 R u' v' R (r^2 + 2v'^2) R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.28)$$

dimana, $R_i = L_7 X_i + L_8 Y_i + 1$

$$\begin{bmatrix} \frac{X_1}{R_1} & \frac{Y_1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{-u_1 X_1}{R_1} & \frac{-u_1 Y_1}{R_1} & \frac{-u'_1 r_1^2 R_1}{R_1} & \frac{-u'_1 r_1^4 R_1}{R_1} & \frac{-u'_1 r_1^6 R_1}{R_1} & \frac{(r_1^2 + 2u_1'^2) R_1}{R_1} & \frac{u'_1 v'_1 R_1}{R_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{X_1}{R_1} & \frac{Y_1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & \frac{-v_1 X_1}{R_1} & \frac{-v_1 Y_1}{R_1} & \frac{-v'_1 r_1^2 R_1}{R_1} & \frac{-v'_1 r_1^4 R_1}{R_1} & \frac{-v'_1 r_1^6 R_1}{R_1} & \frac{u'_1 v'_1 R_1}{R_1} & \frac{(r_1^2 + 2v_1'^2) R_1}{R_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{X_n}{R_n} & \frac{Y_n}{R_n} & \frac{1}{R_n} & 0 & 0 & 0 & \frac{-u_n X_n}{R_n} & \frac{-u_n Y_n}{R_n} & \frac{-u'_n r_n^2 R_n}{R_n} & \frac{-u'_n r_n^4 R_n}{R_n} & \frac{-u'_n r_n^6 R_n}{R_n} & \frac{(r_n^2 + 2u_n'^2) R_n}{R_n} & \frac{u'_n v'_n R_n}{R_n} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{X_n}{R_n} & \frac{Y_n}{R_n} & \frac{1}{R_n} & \frac{-v_n X_n}{R_n} & \frac{-v_n Y_n}{R_n} & \frac{-v'_n r_n^2 R_n}{R_n} & \frac{-v'_n r_n^4 R_n}{R_n} & \frac{-v'_n r_n^6 R_n}{R_n} & \frac{u'_n v'_n R_n}{R_n} & \frac{(r_n^2 + 2v_n'^2) R_n}{R_n} \end{bmatrix}$$

Persamaan (2.28) merupakan persamaan standar untuk *direct linear transformation-2D*, pada persamaan tersebut dapat ditambah dengan suatu kesalahan optik karena distorsi lensa pada kamera akan menyebabkan titik pada citra fotografik bergeser dari lokasi yang ideal.

Contoh soal :

Diketahui Ada 9 buah titik dilapangan masing – masing titik mempunyai nilai (X,Y,Z) yang ditelah diukur dan mempunyai 9 titik koordinat foto.

TITIK	Koordinat Foto (mm)		Koordinat Titik Kontrol (mm)		
	x	y	X	Y	Z
C1	813,7756	2733,6117	674814,497	9121383,179	612,265

C2	577,6894	2748,0397	674822,595	9121361,699	610,308
C3	700,0795	2735,2466	674833,699	9121376,063	611,396
C4	562,8074	2750,5163	674851,119	9121366,038	609,199
C5	534,2165	2741,4951	674867,613	9121366,613	609,437
C6	627,1739	2737,0232	674874,329	9121377,336	609,913
C7	783,2047	2735,5406	674871,435	9121392,18	610,631
C8	683,4364	2739,823	674887,659	9121385,887	609,553

Pertanyaan : Hitunglah nilai parameter kalibrasi kamera untuk nilai *distorsi radial* dan *de centering* dengan metode DLT ?

Pembahasan :

a. Menentukan nilai pendekatan parameter dengan metode *Direct Linear Transformasi* (DLT), langkah –langkah penhitungannya sebagai berikut :

1. Proses linearisasi untuk rumus dasar DLT yang terdapat pada persamaan dibawah ini :

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 - c_x \left[\frac{m_{11}(X_A - X_L) + m_{12}(Y_A - Y_L) + m_{13}(Z_A - Z_L)}{m_{32}(X_A - X_L) + m_{33}(Y_A - Y_L) + m_{33}(Z_A - Z_L)} \right] \\
 y &= y_0 - c_y \left[\frac{m_{11}(X_A - X_L) + m_{12}(Y_A - Y_L) + m_{13}(Z_A - Z_L)}{m_{32}(X_A - X_L) + m_{33}(Y_A - Y_L) + m_{33}(Z_A - Z_L)} \right] \dots\dots\dots(3.1)
 \end{aligned}$$

Maka persamaan yang sudah terlinearisasi yaitu :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{L_1X + L_2Y + L_3}{L_7X + L_8Y + 1} \\
 y &= \frac{L_4X + L_5Y + L_6}{L_7X + L_8Y + 1} \dots\dots\dots(3.2)
 \end{aligned}$$

2. Sebelum melakukan proses least square untuk persamaan yg sudah terlinearisasi terlebih dahulu menyusun matrik A atau matrik koefisien.

$$A = \begin{bmatrix} X_{a1}Y_{a1}Z_{a1}1 & 0 & 0 & 0 & X_1^*X_{a1} & X_1^*Y_{a1} & X_1^*Z_{a1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{a1}Y_{a1}Z_{a1}1 & Y_1^*X_{a1} & Y_1^*Y_{a1} & Y_1^*Z_{a1} \\ X_{a2}Y_{a2}Z_{a2}1 & 0 & 0 & 0 & X_1^*X_{a2} & X_1^*Y_{a2} & X_1^*Z_{a2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{a2}Y_{a2}Z_{a2}1 & Y_1^*X_{a2} & Y_1^*Y_{a2} & Y_1^*Z_{a2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{an}Y_{an}Z_{an}1 & 0 & 0 & 0 & X_n^*X_{an} & X_n^*Y_{an} & X_n^*Z_{an} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{an}Y_{an}Z_{an}1 & Y_n^*X_{an} & Y_n^*Y_{an} & Y_n^*Z_{an} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.3)$$

3. Selanjutnya membentuk matrik L atau matrik observasi dan dari persamaan terlinearisasi.

$$L = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.4)$$

4. Setelah matrik A dan L disusun maka dilakukan proses *Least Square* untuk kedua matrik tersebut.

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L \dots\dots\dots(3.5)$$

5. Dimana X nanti mengandung nilai parameter DLT untuk menghitung nilai parameter Kalibrasi Kamera, yaitu :

$$X^T = [L1 L2 L3 L4 L5 L6 L7 L8]$$

- b. Menentukan titik sekutu yang akan dilakukan perhitungan, untuk DLT-2D mempunyai 8 parameter standar (L1,...,L8) dan parameter distorsi lensa (K1,K2,K3 dan P1,P2) yaitu sebagai berikut :

$$u - \Delta u = \frac{L_1X + L_2Y + L_3}{L_7X + L_8Y + 1}$$

$$v - \Delta v = \frac{L_4X + L_5Y + L_6}{L_7X + L_8Y + 1} \dots\dots\dots(3.7)$$

$$\Delta u = u'(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + P_1(r^2 + 2u'^2) + 2P_2u'v'$$

$$\Delta v = v'(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + 2P_1u'v' + P_2(r^2 + 2u'^2) + A_1u' + A_1u'v'$$

dimana ,

$$u' = u - u_0 = \text{absis titik terdistorsi yang relatif terhadap titik utama}$$

$v' = v - v_0$ = ordinat titik terdistorsi yang relatif terhadap titik utama

(u_0, v_0) = koordinat titik utama

$r = \sqrt{u'^2 + v'^2}$ = jarak radial dari titik utama pada bidang citra fotografik (citra fotografik)

Persamaan 2.7 dapat disusun menjadi bentuk berikut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} u &= \frac{1}{R} (L_1 X + L_2 Y + L_3 - L_7 u X + L_8 u Y + \Delta u) \\ \frac{1}{R} v &= \frac{1}{R} (L_4 X + L_5 Y + L_6 - L_7 u X + L_8 u Y + \Delta v) \dots\dots\dots(3.8) \end{aligned}$$

Persamaan(3.8) dapat disusun dalam bentuk matriks yaitu sebagai berikut :

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & 1 & 0 & 0 & -uX & -uY & u'r^2 R & u'r^4 R & u'r^6 R & (r^2 + 2u'^2) R u'v'R \\ 0 & 0 & 0 & X & Y & 1 & -vX & -vY & v'r^2 R & v'r^4 R & v'r^6 R & u'v'R (r^2 + 2v'^2) R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.9)$$

dimana , $R_i = L_7 X_i + L_8 Y_i + 1$

- c. Menentukan titik sekutu yang akan dilakukan perhitungan, untuk DLT-3D mempunyai 11 parameter standar (L1,...,L11) dan parameter distorsi lensa (K1,K2,K3 dan P1,P2) yaitu sebagai berikut :

$$u = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \dots\dots\dots(3.10)$$

$$v = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \dots\dots\dots(3.11)$$

dimana ,

- u, v = koordinat foto
- X, Y, Z = koordinat di lapangan
- L1, ...,L11 = parameter standar DLT 3D

Rumus persamaan yang akan digunakan untuk mencari parameter distorsinya seperti di bawah ini,

$$\Delta u = u'(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + P_1(r^2 + 2u'^2) + 2P_2u'v'$$

$$\Delta v = v'(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + 2P_1u'v' + P_2(r^2 + 2u'^2) + A_1u' + A_1u'v'$$

dimana ,

$u' = u - u_0$ = absis titik terdistorsi yang relatif terhadap titik utama

$v' = v - v_0$ = ordinat titik terdistorsi yang relatif terhadap titik utama

(u_0, v_0) = koordinat titik utama

$r = \sqrt{u'^2 + v'^2}$ = jarak radial dari titik utama pada bidang citra fotografik

3.3.5 Hasil Perhitungan Direct Linear Transformasi (DLT)

Adapun hasil dari perhitungan DLT-2D, DLT-3D meliputi parameter DLT (L1,...,L8), DLT(L1,...,L11) dan parameter Kalibrasi kamera (K1,K2,K3 dan P1,P2) nilainya sebagai berikut ini.

Tabel 3.1 Nilai Parameter DLT-2D

Parameter DLT	Nilai
L1	90,33176077
L2	19928,08354
L3	-296983868
L4	-0,001674434
L5	0,00014416
L6	-0,302164897
L7	-8,00578E-09
L8	4,77695E-10

Tabel 3.2 Nilai Parameter Distorsi DLT-2D

Keterangan	Perhitungan DLT
K1	-8,13695E-28
K2	-9,86529E-38
K3	-1,03696E-46
P1	3,73165E-23
P2	-2,21802E-30

Tabel 3.3 Nilai Parameter DLT 3D

Parameter DLT	Nilai
L1	0,0144538
L2	13245,43478
L3	153818,2825
L4	-1,20912E+11
L5	16048,21541
L6	-7479,948775
L7	350899,3893
L8	57155438538
L9	3,984447124
L10	-0,299755846
L11	76,27851204

Tabel 3.4 Nilai Parameter Distorsi DLT-3D

Keterangan	Perhitungan DLT
K1	-4,75131E-08
K2	1,27065E-21
K3	-8,39147E-36
P1	4,4782E-14
P2	-9,10073E-08